Теорема.

Не существует алгоритма А, который для любого алгоритма Е по его записи мог бы определить, является ли Е самоприменимым или нет.

То есть не существует такого алгоритма А, который

$$\forall \text{ алгоритма } E:\quad A(\langle\text{запись } E\rangle) = \begin{cases} C, & \text{если } E \text{ самоприменим,}\\ H, & \text{если } E \text{ несамоприменим}\end{cases}$$

(*Замечание*: Вместо *С* (самоприменим) и *Н* (несамоприменим) можно использовать два других слова, главное, чтобы они были различны)

Доказательство (от противного):
Проведем доказательство от противного. Предположим, что такой алгоритм А существует. Значит он может быть записан в виде нормального алгоритма Маркова (НАМ).

Составим следующий алгоритм *В*:

$$\begin{cases} C \to C \\ H \mapsto H \end{cases}$$

Этот алгоритм зацикливается, если ему на вход дают слово *С*, и останавливается, если на входе – слово *Н*.

Рассмотрим теперь композицию алгоритмов *В* и *А* и обозначим ее *К*: *К*=*В*○*А*.
По определению композиции для ∀ слова *Р* *К*(*Р*)=*В*(*А*(*Р*)). Композиция двух НАМ есть также НАМ. Следовательно, *К* - НАМ.

А теперь поставим такой вопрос: алгоритм *К* - самоприменим или нет? Рассмотрим оба варианта.

а) Предположим, что *К* – самоприменим. Тогда имеем:

К(<*запись К*>) = {по определению композиции}=*В*(*А*(<*запись К*>)) =
= {так как К самоприменим, а А умеет это различать} = *В*(*С*)
- зацикливание!

Следовательно, *К* несамоприменим. Итак, предположение, что *К* – самоприменим, привело к противоречию, т.е. это предположение ложно.

б) Предположим теперь, что *К* - несамоприменим. Тогда имеем:

К(<*запись К*>) = *В*(*А*(<*запись К*>)) = *В*(*Н*) = *Н* - останов!

Следовательно, *К* самоприменим. Таким образом, и в этом случае мы пришли к противоречию.
Любой алгоритм либо самоприменим, либо несамоприменим.
Алгоритм *К* не является ни самоприменимым, ни несамоприменимым, а такого алгоритма не существует.

Возможны три причины этого:

1) не существует алгоритма *А*;
2) не существует алгоритма *В*;
3) не существует композиции *В*○*А*

Но алгоритм *В* мы явно предъявили, следовательно, он существует. Кроме того, если алгоритмы *А* и *В* существуют, то и их композиция существует и является алгоритмом (было показано для машин Тьюринга, но аналогично и для нормальных алгоритмов Маркова). Следовательно, и третья причина отпадает.

Остается первая причина, а именно, не существует алгоритма А. Значит, наше первоначальное предположение ложно. Следовательно, *А* - не существует.

Доказано: проблема самоприменимости алгоритмически неразрешима, т.е. не существует единого способа, который бы позволил бы для любого алгоритма определять, самоприменим этот алгоритм или нет.

Однако отсюда не следует, что ни для какого *конкретного* алгоритма нельзя определить, самоприменим он или нет (не существует *единого* способа решения проблемы самоприменимости для всех алгоритмов сразу).