

# Реализация алгоритма преобразования линейных дифференциально-алгебраических систем

Курсовая работа

Носов Анатолий Владимирович

Научный руководитель - Панфёров Антон Александрович

11.05.2022

# Введение

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида  $y' = Ay$ .

Линейные дифференциальные системы высоких порядков имеют вид:  
 $A_r y^{(r)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0$ .

*Дифференциально-алгебраическая система* - система вида  $A_1 y' + A_0 y = 0$ , где  $A_1$  - вырожденная ненулевая матрица.

Для получения нормальной системы из таких систем существует алгоритм *Extract*. Данный алгоритм не был ранее реализован в системе компьютерной алгебры Maxima.

# Постановка задачи

В курсовой работе требовалось:

- 1 Изучить алгоритм Extract для преобразования линейных дифференциально-алгебраических систем.
- 2 Изучить систему компьютерной алгебры Maxima и ее возможности.
- 3 Реализовать алгоритм Extract в системе компьютерной алгебры Maxima.

## Extract. Алгоритм

Дифференциально-алгебраические системы высоких порядков можно свести к виду  $A_1 y' + A_0 y = 0$  где матрица  $A_1$  будет вырожденной.

Существуют задачи относительно дифференциальных систем, в которых некоторые неизвестные представляют больший интерес. Такие переменные называются выделенными.

По введенным матрицам  $A_1, A_0$  и вектору выделенных неизвестных, алгоритм *Extract* возвращает матрицу для нормальной дифференциальной системы с новым вектором неизвестных и матрицу алгебраической системы  $T$  (если она будет).

*Extract* позволяет обобщить алгоритмы, сформулированные для нормальных дифференциальных систем (т.е. систем вида  $y' = Ay$ ), на произвольные линейные дифференциальные системы высоких порядков.

# Extract. Алгоритм

## Extract:

Вход: линейная дифференциально-алгебраическая система

$$A_1 y' + A_0 y = 0$$

где  $A_0, A_1 \in K^{m \times m}$ ,  $A_1 \neq 0$  и множество выделенных неизвестных.

Выход: матрицы новой дифференциальной и алгебраической систем, новый вектор неизвестных. Алгоритм состоит из трёх этапов:

- 1 Исключение невыделенных неизвестных.
- 2 Исключение выделенных неизвестных.
- 3 Выражение исключённых выделенных неизвестных через оставшиеся в дифференциальной системе выделенные неизвестные.

# Maxima

Maxima имеет широкий набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам, как Maple и Mathematica.

Maxima распространяется свободно с 1998 года, является системой компьютерной алгебры общего назначения. Основные преимущества в сравнении с другими системами – свободно распространяется, занимает мало места, получает обновления примерно два раза в год. Последнее обновление было 13 апреля 2022 года. Официальный сайт: <https://maxima.sourceforge.io/ru/>

Maxima написана на языке Lisp, но синтаксис собственного языка программирования в Maxima сильно отличается.

## Extract. Реализация в Maxima

Функция *Extract*:

Пример вызова:  $[A, y\_res, T] : extract(A1, A0, y, y\_s)$

Параметры:  $A1$  – матрица при  $y'$ ,  $A0$  – матрица при  $y$ ,  $y$  – вектор неизвестных системы вида  $[y_1 \dots y_n]$ ,  $y\_s$  – вектор индексов выделенных неизвестных вида  $[1, 2, .. i]$ .

Результат работы: список  $[A, y\_res, T]$ , где  $A$  – матрица нормальной дифференциальной системы,  $y\_res$  – новый вектор неизвестных системы,  $T$  – матрица алгебраической системы.

# Extract. Реализация в Maxima. Пример

```
(%i6) print(A1, A0)$
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & x & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x(x+1) & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -x-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_1, A_0$  – матрицы  
дифференциально-  
алгебраической  
системы,  
 $y$  – список  $[y_1, y_2, \dots, y_6]$ ,  
 $y\_s$  – список  $[1, 2]$

```
(%i8) [A, y_res, T] : extract(A1, A0, y, y_s);
```

```
(%o8) [
```

$$\begin{pmatrix} \frac{x-1}{x} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -x-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [y_2, y_3, y_4, y_6], (-x)$$

```
]
```

# Основные результаты

В ходе курсовой работы были получены следующие результаты:

- 1 Изучен алгоритм Extract для преобразования линейных дифференциально-алгебраических систем с выделенными неизвестными.
- 2 Изучена система компьютерной алгебры Maxima и ее возможности.
- 3 Алгоритм Extract реализован в системе компьютерной алгебры Maxima. Реализация доступна по ссылке:  
[https://github.com/Anato-Lich/Extract\\_maxima](https://github.com/Anato-Lich/Extract_maxima)

## Список литературы

- 1 Панферов А. А. Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных // Программирование. — 2015. — No 2. — С. 26–36.
- 2 Чичкарев Е. А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов. — 2012. — 384.
- 3 Maxima. Maxima 5.17.1 Manual. — Access mode: [https://maths.cnam.fr/Membres/wilk/MathMax/help/Maxima/maxima.html#SEC\\_Top](https://maths.cnam.fr/Membres/wilk/MathMax/help/Maxima/maxima.html#SEC_Top).
- 4 Maxima. The Computer Algebra Program Maxima - a Tutorial. — Access mode: <https://maxima.sourceforge.io/docs/tutorial/en/gaertner-tutorial-revision/Contents.htm>